פרקטלים

כשמתמטיקה פוגשת
מדע, טבע ואומנות

ליאורה נוטוב
האקדמית גורדון

עטרה שריקי
מכללת סמינר הקיבוצים

לובה ויסוצ'אנסקי
האקדמית גורדון

Fractals: When Mathematics Meets Science, Nature, and Art

Liora Nutov, Atara Shriki, Luba Visochansky

כתיבה: **ליאורה נוטוב, עטרה שריקי, לובה ויסוצ'אנסקי**

הוצאת הספרים של מכון מופ"ת:

עורכת ראשית: **תמי ישראלי**

עורכת אקדמית: **בלה יעבץ**

עורכת לשון ותוכן: **מיכל קירזנר-אפלבוים**

עורכת ומעצבת גרפית: **בלה טאובר**

עיצוב העטיפה: **גיא הוד ובלה טאובר, על בסיס יצירה של ליאורה נוטוב**

מסת"ב: 978-965-530-216-5

טל': 03-6901428 http://www.mofet.macam.ac.il

הדפסה: דפוס הנצחון

תוכן העניינים

לזכרה של ד"ר ליאורה נוטוב

ליאורה אהובה,

אני זוכרת את הרגע הזה, לפני כמעט עשר שנים, שבו אמרת לי בהתלהבות המאפיינת אותך: "בואי נכתוב ספר על פרקטלים". ואני, שלמדתי לבטוח ביכולת שלך לראות קדימה, נסחפתי אחר ההתלהבות המידבקת שלך. למסע שלנו הצטרפה גם לובה.

במשך השנתיים שעמלנו בהן על כתיבת הספר, חיכית כל כך לרגע שבו תאמצי את הספר אל ליבך ותגידי לי, "את רואה, אמרתי לך שנכתוב ספר על פרקטלים!"

אז הנה אנחנו כאן, מחזיקים את הספר שמגשים את החלום שלך, הספר שכולו מוקדש רק לך. לזכרך.

אלברט איינשטיין אמר שאיננו יכולים להגיע למקום שאנו חולמים להיות בו מחר, אלא אם כן נשנה את החשיבה שלנו היום. ליאורה אהובה, בדיוק כך אזכור אותך תמיד.

מתגעגעת,

עטרה

מבוא

הזמנה למסע

מסע. המילה "מסע" מעוררת אצל כל אחת ואחד מאיתנו תחושות ודימויים מסוגים שונים. מסע יכול להתרחש במסלול קצר או ארוך, ישר או מפותל. מסע יכול להיות מהיר, ולחלופין הוא יכול לארוך זמן ממושך. מסע יכול להשאיר רושם ארעי, אך יש בכוחו גם להטביע את חותמו העמוק לאורך זמן. לכל מסע מאפיינים ומטרות משלו. כל מסע מקבל פרשנות ייחודית משלו, דרך עיני האדם ההולך בו.

בשנת 2016 יצאנו למסע. כשהתחלנו, לא ידענו מה עתיד להתרחש. לא ידענו לחזות מה נפגוש בדרך, אילו מחשבות ותחושות יעוררו בנו המפגשים וכמה מעמיקים הם יהיו. יצאנו למסע מתוך מטרה להעשיר את הידע שלנו על אודות הצורות הקסומות שנקראות "פרקטלים". אומנם יצאנו לדרך כשאנחנו מצוידות בידע שצברנו בנושא במשך כמה שנים, אולם כבר בתחילתה הבנו שצפויים לנו חידושים והפתעות ושהמסלול שנעבור יהיה מפותל וארוך, מפעים ומרתק.

הספר שלפניכם מתאר את העולם המופלא שגילינו, את התכונות הפרקטליות שלא הכרנו, את הביטויים המגוונים של פרקטלים בתחומים השונים ואת יישומיהם המפתיעים. אנחנו מזמינות אתכם, קוראות וקוראים, לצאת למסע בעולם שבו מתמטיקה עשירה פוגשת יופי חזותי לא שגרתי, יישומים טכנולוגיים עדכניים, תופעות טבע מגוונות ותופעות מוכרות מחיי היום-יום. אנחנו מזמינות אתכם לחוות את המסע מבעד לעדשות שתבחרו להרכיב.

אולם ראשית, ברצוננו לומר כמה מילים על טבעה של המתמטיקה בכלל ועל הגיאומטריה הפרקטלית בפרט. זה למעלה מארבעת אלפים שנה, עולם המתמטיקה מתפתח ללא הרף. לפי נתוני האגודה האמריקנית למתמטיקה (AMS - American Mathematical Society), נכון לשנת 2019 מצויים כ- 3,400,000 פרסומים במאגר Mathematical Reviews, שנוסד בשנת 1940 וכולל מידע על כתבי עת, מאמרים וספרים בתחום המתמטיקה וכן חוות דעת של מומחים. פרסומים אלה לקוחים, בין השאר, מתוך כאלף ושמונה מאות כתבי עת בין-לאומיים. מדי שנה נוספים למאגר למעלה מ-100,000 פריטים חדשים במתמטיקה, המחולקים לכחמשת אלפים נושאים תחת כמאה קטגוריות (http://www.ams.org/mr-database).

אולם למרבה הצער, אופייה הדינמי והמתפתח של המתמטיקה, שהוא פועל יוצא של התמדתם של מתמטיקאים ושל מאמציהם לגלות ממצאים חדשים ולהעלות שאלות חקר נוספות, אינו בא לידי ביטוי בתוכנית הלימודים הבית-ספרית. עקב כך, רבים תופסים את המתמטיקה כתחום סגור שהכול בו כבר ידוע ולא נותר עוד מה לחדש בו (Movshovitz-Hadar, 2008).

הגיאומטריה הפרקטלית היא אחת הדוגמאות לאי-נכונותה של תפיסה זו. כתחום חדש יחסית, היא פותחת אשנב למתמטיקה בת זמננו. בנוסף לכך, היא מצויה בתהליך מתמיד של התפתחות והתחדשות. גיאומטריה זו החלה להתפתח במאה ה-19, עם הצגתם של אובייקטים שזכו לכינוי "מפלצות מתמטיות", וקיבלה תוקף פורמלי במחצית השנייה של המאה ה-20. את יסודות הגיאומטריה הפרקטלית פיתח בשנות השישים של המאה ה-20 המתמטיקאי היהודי בנואה מנדלברוט (Benoit Mandelbrot, 1924-2010). בביקורו בשנת 1958 בחברת IBM, מנדלברוט זיהה את הפוטנציאל של שימוש במחשב לקידום התחום ששקד עליו, והחליט לעבוד בחברה. חברת IBM סיפקה למנדלברוט תקציב, ציוד, צוות מחקר ובעיקר חופש יצירה. כל אלה אפשרו לו לחשוף את העושר החזותי הגלום בגיאומטריה הפרקטלית, תוך שהוא דוחק את המחשבים לקצה גבול היכולת שלהם (Lesmoir-Gordon, 2018). עם פרישתו לגמלאות מהחברה, מונה מנדלברוט לפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת ייל שבקונטיקט, ועד יומו האחרון המשיך לפתח את הגיאומטריה הפרקטלית, תוך שהוא מנגיש אותה לציבור הרחב. כיום שמו של מנדלברוט מוכר לא רק בעולם האקדמי, אלא גם מחוצה לו, תופעה שאינה שכיחה עבור מתמטיקאים.

מלבד היותה של הגיאומטריה הפרקטלית דוגמה לתחום מתמטי חדש יחסית שמתפתח ללא הרף ומוצא את ביטויו במגוון יישומים חדשניים שאת חלקם נדגים לאורך הספר, אנו מאמינות שהגיאומטריה הפרקטלית יכולה לשמש, כדבריו של מנדלברוט (Mandelbrot, 2002), כ"שער למתמטיקה". ככזו היא יכולה להפוך לנושא מארגן של תוכנית הלימודים במתמטיקה החל מגן הילדים ועד לאקדמיה. ברחבי העולם ניכרים ניצנים ראשונים של שילוב הגיאומטריה הפרקטלית בתוכנית הלימודים במתמטיקה בגיל הגן (למשל, Gires, Villepoux, & Rouellé, 2014), בבית הספר היסודי (למשל, נוטוב ושריקי, 2018; Fraboni & Moller, 2008; Ko & Park, 2011; Nutov & Shriki, 2016; Siegrist et al., 2009; Vacc, 1999), בחטיבת הביניים (למשל, נוטוב, 2015; Brincks, 2005; Lornell & Westerberg, 1999; Raiteri, 2005; Stanley, 1989) ובחטיבה העליונה (למשל, נוטוב ועזריאל, 1996; Forster, 1997; Hui & Lam, 2013). כמו כן, במקומות שונים בעולם אפשר

למצוא תוכניות העשרה חוץ בית ספריות המשלבות תכנים מתוך הגיאומטריה הפרקטלית, ותקצר היריעה מלסקור אותן בספר זה.

מסקר ספרות שעסק בהוראת גיאומטריה פרקטלית (Chen, 2015), עולה שמחקרים שנעשו על שילוב נושא הפרקטלים בהוראה מעידים על התלהבות מצד מורים, סטודנטים ותלמידים ועל תרומתו של העיסוק בנושא להגברת המעורבות של הלומדים בתהליך הלמידה. גם ניסיוננו בעבודה עם מורים (שריקי ונוטוב, 2019; Nutov, 2017; Nutov & Shriki, 2016; Shriki & Nutov, 2016) מלמד שמורים מגלים סקרנות רבה ועניין גדול בלימוד נושאים מתוך הגיאומטריה הפרקטלית וכן בשילובם בהוראה.

מעבר לעניין ולהתלהבות, חוקרים בתחום החינוך המתמטי מצביעים על כך שלימוד הגיאומטריה הפרקטלית מסייע לתלמידים להכיר את המבנה של מגוון צורות ולפתח את החשיבה הלוגית-דדוקטיבית שלהם. יש לזכור שאף שלהתפתחות הגיאומטריה האוקלידית יש תפקיד מרכזי בהבנת המרחב שאנו חיים בו ובתיאורו, היא אינה מספקת כלים מתאימים כדי להסביר את כלל התופעות הקשורות לצורות ולאובייקטים שאינם מתנהגים בהתאם לתבנית קבועה או צפויה מראש, כגון מערכת כלי הדם, רשתות של נהרות או אורכו של קו חוף. ההסבר של תופעות מסוג זה דורש ממורים להיות בעלי ידע בגיאומטריה פרקטלית, שכן היא זו שמספקת הסברים לתופעות טבע רבות שלגיאומטריה האוקלידית אין מענה עבורן, וככזאת היא גם מציעה דרך חדשה לחשיבה על גיאומטריה (Chen, 2015). עם זאת, מובן שהגיאומטריה הפרקטלית אינה מספקת תשובות לכל התופעות שלא ניתן להן מענה במסגרת הגיאומטריה האוקלידית. לשם כך התפתחו גיאומטריות לא אוקלידיות נוספות, כגון גיאומטריה היפרבולית, גיאומטריה פרויקטיבית, גיאומטריה כדורית ועוד.

נשאלת אם כן השאלה, מהם אותם מאפיינים של הגיאומטריה הפרקטלית, שהופכים את העיסוק במתמטיקה לא רק למאתגר, אלא גם למהנה. כפי שתוכלו לראות בפרקי הספר השונים, העצמים המתמטיים המכונים פרקטלים מבטאים עושר חזותי, מגוון וייחודיות. היבטיהם החזותיים מאפשרים לגייס את חוש הראייה של הלומדים ואת האינטליגנציה הרגשית שלהם לצורך יצירת הניעה ללמידה מתוך הנאה (Raiteri, 2005). בנוסף לכך, הגיאומטריה הפרקטלית מאפשרת לקשר בין נושאים מתמטיים הכלולים בתוכנית הלימודים, ואף בין המתמטיקה לבין תחומי דעת אחרים. לכן היא יכולה לשמש כבסיס לביצוע פעילויות חקר ולהוביל את התלמידים לגלות תכונות בלתי מוכרות, וכך לתמוך בהתפתחות הסקרנות שלהם ללמידה. גישה זו עולה בקנה אחד עם ההכרה ההולכת וגוברת

בחשיבות החינוך לפי מודל STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics), המשלב בין מדעים, טכנולוגיה, הנדסה, אומנות ומתמטיקה.

מבנה הספר

הספר כולל חמישה פרקים, כאשר ארבעת הפרקים הראשונים חושפים בפניכם הקוראים כמה ממאפייני הפרקטלים ותכונותיהם ומובילים להגדרה של המושג "פרקטל", והפרק החמישי מתאר את המפגש האישי של כל אחת מכותבות הספר עם נושא הפרקטלים ועם הוראתו.

בפרק הראשון נתוודע אל הגיאומטריה הפרקטלית ונכיר שלוש דרכים אפשריות ליצירת סוג מסוים של פרקטלים: פרקטלים ליניאריים. **בפרק השני** נעסוק בקשרים המפתיעים בין מידת ההיקף של פרקטלים ליניאריים לבין שטחם, תוך העמקת התובנות לגבי המשמעות של היקף, צורה ומשטח של צורה ולגבי הקשרים הדינמיים בין שטח לבין מידת היקף. כמו כן נעסוק באופן אינטואיטיבי במושג האין-סוף. **בפרק השלישי** נדון במשמעות של דמיון עצמי ונחקור סוגיות הקשורות לקנה מידה. **בפרק הרביעי** נערוך היכרות עם המשמעות של "ממד פרקטלי", שהיא שונה מהמשמעות המוכרת של ממד בגיאומטריה האוקלידית. המושג "ממד פרקטלי" יאפשר לנו לנסח סוף-סוף הגדרה פורמלית של המושג "פרקטל". **הפרק החמישי** מציג סיכום אישי קצר של המסע שכל אחת מאיתנו עברה מאז שנחשפה לנושא הפרקטלים וכן במהלך כתיבת הספר, וכן מבחר דוגמאות מתוך הניסיון שצברנו בשילוב נושאים נבחרים בגיאומטריה פרקטלית במסגרות שונות.

כל אחד מארבעת הפרקים הראשונים בנוי מארבעה חלקים:

- הסבר תאורטי כללי לגבי הנושאים הכלולים בפרק, תוך קישורם לתופעות מחיי היום-יום ויצירת הבנה אינטואיטיבית שלהם, ולאחר מכן פיתוח מתמטי של הנושאים ודיון בהם.
- "פסק זמן פרקטלי": ביטויים של פרקטלים בתחומי המדע, הטבע, העיצוב, הארכיטקטורה והאומנות.
- משימות חקר ברמות חשיבה שונות ובמגוון של רמות ידע. המשימות נועדו להעמיק את הידע ואת התובנות על הנושאים שהוצגו בפרק. המשימות מלוות בהסבר על אודות הרציונל העומד בבסיסן, ובסיומן מופיעים פתרונות מפורטים. בחלק מהמשימות יש חזרה על תכנים שפורטו בחלקו התאורטי של הפרק. מבנה זה מאפשר להתנסות במשימות מתוך ההקשר שלהן, גם ללא רקע קודם.
- רשימת המקורות הנזכרים בפרק והפניות למקורות שהאיורים נלקחו מהם.

לסיום, ברצוננו להודות לד"ר בלה יעבץ ממכון מופ"ת, על הליווי בכתיבת הספר ועל הערותיה והארותיה הטובות; לד"ר דודו רוטמן, לשעבר ראש הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, ולד"ר תמי ישראלי שהחליפה אותו בתפקיד; לחני שושתרי, רכזת הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, על הנכונות הגדולה להגיש סיוע בכל עת ובכל עניין; לשני המעריכים של הספר - ד"ר אלי אפלבוים וד"ר גדי אלכסנדרוביץ', על הקריאה הקפדנית שסייעה לנו לדייק בהתייחסותנו ולהעמיק אותה; למיכל קירזנר-אפלבוים על העריכה הלשונית המקצועית; לבלה טאובר על השעות הרבות שהקדישה לעיצוב הספר; ולגיא הוד על האיורים השזורים בפרקי הספר ועל עיצוב הכריכה על בסיס יצירה של ליאורה נוטוב.

אנו מאחלות לכם מפגש מהנה עם הפרקטלים,
ליאורה נוטוב, עטרה שריקי ולובה ויסוצ'אנסקי
אפריל 2020

רשימת מקורות

נוטוב, ל' (2015). אני ופרקטלים אחרים. **מספר חזק 2000**, **26**, 22-15.

נוטוב, ל' ועזריאל, ל' (1996). משולש שיירפינסקי וציורו במחשב. **על"ה**, **18**, 21-17.

נוטוב, ל' ושריקי, ע' (2018). מעבֵר לאוקלידס: פרקטלים כמקור לפעילויות חקר בגיאומטריה. בתוך א' לבנברג וד' פטקין (עורכות), **גיאומטריה פנים רבות לה - מן המחקר אל המעשה בהוראת גיאומטריה** (עמ' 351-305). מכון מופ"ת.

שריקי, ע' ונוטוב, ל' (2019). התרומה של קהיליית חקר לומדת של מורה-תלמידים להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי. **ביטאון מכון מופ"ת: מחקר, כתיבה והתפתחות מקצועית בהכשרת מורים**, **36**, 34-27.

Brincks, L. (2005). *Fractals and chaos: A creative component*. Unpublished master's thesis, Iowa State University, Ames.

Chen, S. (2015). *Assessing awareness, interest, and knowledge of fractal geometry among secondary mathematics teachers in the United States and China*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Southern Mississippi. http://aquila.usm.edu/cgi/viewcontent.cg i?article=1144 &context=dissertations[1]

1 כל הקישורים המופיעים בספר מעודכנים לאפריל 2020.

Forster, P. (1997). Using fractals to teach complex numbers with a constructivist approach. *Australian Senior Mathematics Journal, 11*(2), 14-22.

Fraboni, M., & Moller, T. (2008). Fractals in the classroom. *The Mathematics Teacher, 102*(3), 197-199.

Gires, A., Villepoux, M., & Rouellé, V. (2014). *Teaching (an introduction to!) fractals and rainfall features in kinder garden*. Vienna, Austria: EGU General Assembly. http://adsabs.harvard.edu/abs/2014EGUGA..16.6772G

Hui, T., & Lam, T. T. (2013). On the teaching of the representation of complex numbers in the Argand diagram. *Learning Science and Mathematics, 8*, 5-86.

Ko, Y., & Park, N. (2011). Experiment verification of teaching fractal geometry concepts using a logo-based framework for elementary school children. In T. Kim, H. Adeli, D. Slezak, F. E. Sandnes, X. Song, K. Chung, & K. P. Arnett (Eds.), *Future generation information technology: Third international conference, FGIT 2011 in conjunction with GDC 2011, Jeju Island, Korea, December 8-10, 2011. Proceedings* (pp. 257-267). Springer.

Lesmoir-Gordon, N. (2018). *Clouds are not sphere: A portrait of Benoit Mandelbrot. The founding father of fractal geometry*. World Scientific.

Lornell, R., & Westerberg, J. (1999). Fractals in high school: Exploring a new geometry. *Mathematics Teacher, 92*(3), 260-269.

Mandelbrot, B. B. (2002). Fractals, graphics, and mathematics education. In M. L. Frame & B. B. Mandelbrot, *Fractals, graphics, and mathematics education* (pp. 21-28). Mathematics Association of America.

Movshovitz-Hadar, N. (2008). Today's news is tomorrow's history: Interweaving mathematical news in teaching high-school math. In E. Barbin, E. Stehlikova, & N. C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the fifth European Summer University* (pp. 535-546). Vydavatelsky Press.

Nutov, L. (2017). Diminishing epistemic authority: A lever for mathematics teachers' professional development. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh,

& B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 41)* (Vol. 3, pp. 321-328). PME.

Nutov, L., & Shriki, A. (2016, July). *Teacher and students as a collaborative inquiry learning community: A means for teachers' professional development*. Paper presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.

Raiteri, A. C. (2005, July). *An action research on line to introduce fractals in the teaching and learning of mathematics from primary to secondary school*. Paper presented at CIEAEM 57, Italy. http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_codetta.pdf

Shriki, A., & Nutov, L. (2016). Fractals in the mathematics classroom: The case of infinite geometric series. *Learning and Teaching Mathematics, 20*, 38-42.

Siegrist, R., Dover, R., & Piccolino, A. (2009). Inquiry into fractals. *Mathematics Teacher, 103*(3), 206-212.

Stanley, H. E. (1989). Learning concepts of fractals and probability by "doing science". *Physica D: Nonlinear Phenomena, 38*(1), 330-340.

Vacc, N. (1999). Exploring fractal geometry with children. *School Science and Mathematics, 99*(2), 77-83.