

**מתמטיקה:**  
**הוראה בהקשר והוראת ההקשר**

מריטה ברבש



מריטה ברבש

# מתמטיקה: הוראה בהקשר והוראת ההקשר

**Mathematics: Teaching in context, teaching  
the context**

*Marita Barabash*

כתיבה: ד"ר מריטה ברבש, אחוה - המכללה האקדמית לחינוך

הוצאת הספרים של מכון מופ"ת:

עריכה ראשית: ד"ר יהודית שטיימן

עריכת טקסט ולשון: שמוליק אבידר

עריכה גרפית: ענת דקל

עיצוב עטיפה: אורית לידרמן

מסת"ב: 978-965-530-052-9

© כל הזכויות שמורות למכון מופ"ת, תשע"ב (2012)

טל' 03-6901406 <http://www.mofet.macam.ac.il>

דפוס: תירוש הוצאה לאור

## תוכן

7.....	<b>מבוא</b>
	<b>חלק ראשון - אלגברה ואריתמטיקה: בעיות אלגבריות הקשורות במספרים</b>
13 .....	<b>שלמים</b>
15 .....	הקדמה
	פרק 1 - סדרה חשבונית של מספרים שלמים: גישה אלגברית בהשוואה לגישה המתבססת על תכונות של מספרים שלמים
19 .....	פרק 2 - שימוש באינדוקציה מתמטית להוכחת התחלקות
37 .....	פרק 3 - בעיות מילוליות הקשורות במספרים שלמים
54 .....	בעיות מילוליות הקשורות במכפלות של מספרים עוקבים
54 .....	בעיות מילוליות הקשורות במספרים רב-ספרתיים
73 .....	בעיות מילוליות הקשורות בגיל - התרה אלגברית מול "שיקולי גיל"
91 .....	
	<b>חלק שני - רואים מספר: אלגברה, אריתמטיקה וגאומטריה –</b>
99 .....	<b>הצגה גאומטרית של מספרים טבעיים ושל מספרים אי-רציונליים</b>
101 .....	הקדמה
106 ...	פרק 1 - ריבועים שלמים, מספרי פיתגורס ומספרים אי-רציונליים "פשוטים"
143 .....	פרק 2 - הצגה גאומטרית של מספרים בהיבט של מדידות אורך בגאומטריה
155 ....	פרק 3 - הצגה גאומטרית של מספרים אי-רציונליים אשר אינם מהצורה $\sqrt{N}$
171.....	<b>חלק שלישי - תכונות אופטיות של פרבולהושל אליפסה</b>
173 .....	הקדמה
177 .....	פרק 1 - תכונות אופטיות של פרבולה
205 .....	פרק 2 - תכונות אופטיות של אליפסה
221.....	<b>ביבליוגרפיה</b>



## מבוא

ספר זה מיועד למורי מכללות המכשירים מורים למתמטיקה, בעיקר מורים לחטיבת הביניים. הספר מכיל פרקי ידע דיסציפלינרי במגוון תחומים של המתמטיקה ובתחומי דעת אחרים. פרקים אלה מלווים בתמיכה דידקטית המדריכה כיצד להורות אותם במסגרת הכשרת מורים..

הספר נכתב מתוך אמונה שלידע דיסציפלינרי כזה יש השלכה ישירה על מגוון היבטים דידקטיים ועל דרכי הוראה-למידה של מתמטיקה – הן ברמה של הסטודנטים, הן ברמה של תלמידיהם בעתיד. סוגיית רמת הידע הדיסציפלינרי (subject matter knowledge) של המורים למתמטיקה נדונה בהרחבה בספרות המקצועית. מטרת הדיונים האלה היא למצוא את "שביל הזהב": האיזון בין הידע הדיסציפלינרי של המורה לבין הכשרתו הדידקטית לקראת הוראה בבית הספר. בדיון כזה חשוב לעסוק לא רק בכמות או ברמה של הידיעות בתחום התוכן המתמטי, אלא גם בסוג הידע והתאמתו לעיסוק העתידי של המורה. הכוונה היא לידע דיסציפלינרי שיוכל לתרום ליכולת ההוראה ולרמת התפקוד של המורה בעתיד.

הנחת היסוד שלי היא שמורי המורים למתמטיקה שואפים לנתב את דרך הוראת המתמטיקה לכיוון של פיתוח חשיבה מתמטית ושל חשיבה בכלל, לא לכיוון יצירה של "טקסים" (rituals), כלשונו של דיוויס (Davis, 1988):

*רוב הוראת המתמטיקה מרמת בית הספר היסודי ועד ללימודים  
האקדמיים מלמדת את מה שאפשר לכנות 'טקסים': 'עשה כך',  
אחר כך עשה כך, ואז תעשה כך... '... בדרך כלל המורים מוכנים  
לקבל את הטקס המבוצע כהלכה כהצלחה מספקת בשלב הנוכחי.*

בספרות המקצועית של השנים האחרונות אין עדיין סיכום חד-משמעי של הדיון בסוגיה הזו אך אי-אפשר להתעלם מתמונת המצב שתיאר ברום (Bromme, 1994). ברום סוקר ממצאים המצביעים על כך שלידע מתקדם של מורים למתמטיקה בתחום הדעת יש לא יותר מאשר תרומה שולית להצלחתם בהוראה. עם זאת, הוא גם מצביע על הקושי לבודד את משתנה הידיעות הדיסציפלינריות של המורה משאר הגורמים המשפיעים על הצלחת המורה

בכיתה. ברום מציג גם טענות של חוקרים אחרים הטוענים שלידע בתחום הדעת יש השפעה על גורמים נוספים :

*...הידע הזה [בתחום הדעת] משפיע על איכות ההסבר שאפשר [על ידי המורים] (Roehler et al., 1987) ועל היכולת [שלהם] לשלב בתוך מעשה ההוראה שלהם תרומות שהתלמידים תורמים לנושא, ושאינן עולות בדיוק בקנה אחד עם אותה רמת משמעות שאליה התכוונו המורים (Hasweh, 1986).*

*קרלסן (Carlsen, 1987) חקר את הקשר שבין ידע בתחום הדעת לבין שאילת שאלות של מורים בהוראת מדעים... ביחידות הוראה בנושאים שבהם המורים ידעו מעט באופן יחסי, הם שאלו שאלות ישירות יותר, שאלות ברמה קוגניטיבית נמוכה. בנושאים שבהם המורים התמצאו טוב יותר, התלמידים דיברו יותר והציעו באופן ספונטני תרומה משלהם לנושא... רק מורים בעלי ידע טוב בתחום הדעת בטוחים בעצמם עד כדי כך שהם מסוגלים לנהל פעילויות כיתה ישירות אפילו במקרים שבהם התלמידים הולכים בדרכי עבודה חדשות (Dobey and Shafer, 1984).*

מודל להוראת מתמטיקה שמטרתו לפתח חשיבה רחבה, שיטתית ויצירתית של לומדים בכל הרמות אינו יכול להסתפק בשאילת שאלות ישירות ברמה קוגניטיבית נמוכה. לפי ברום ולפי חוקרים אחרים שהוא מצטט, ולמרות אמונתו המבוססת על שנים רבות של הוראת מתמטיקה במסגרת של הכשרת מורים, חשוב מאוד שהמורה למתמטיקה יהיה בעל ידע רחב בתחום התוכן. ידע רחב בתחום התוכן חשוב לא פחות מאשר ידע דידיקטי. כמו כן חשוב שהידע הזה "יהיה פעיל" בכל המצבים המתהווים בכיתות הלימוד. חשוב לא פחות שהידע לא יהיה תחום בגבולותיו של פרק כזה או אחר של המתמטיקה, או אפילו בגבולותיו של תחום דעת אחד בלבד. אינטגרציה של ידע, מונח שהיה למושג מפתח בשנים האחרונות, יכולה להיות מושתתת על בסיס רחב, כמו גם על ההכרה שיש צורך בקיומו של בסיס שכזה. אם כך אנחנו מבינים את חשיבות הידע בתחום הדעת, פירושו של דבר שיש לפתח ראייה רחבה של המתמטיקה.



פיתוח ראייה רחבה יעשה באמצעות חשיפת יחסי הגומלין שבין תחומים שונים כדי שתהליכי ההוראה-למידה יביאו להפעלה יצירתית ואינטלקטואלית של הלומדים. אם המטרה תושג, התלמידים יפתחו מודעות לכך שקשרים עמוקים ומסועפים קיימים בתחום הדעת ומודעות לקיומן של דרכי חשיבה מגוונות. ולא זו בלבד שיהיו מודעים להם, הם אף יחפשו אותם. דובינסקי<sup>1</sup> (Dubinsky, 1991) רואה את פעולת הלמידה וההוראה כדלהלן:

*אם... למידה כרוכה ביישום של הפשטה רפלקטיבית לגבי סכמות קיימות במטרה להבנות סכמות חדשות לשם הבנת מושגים, ...אזי... סכמה אינה יכולה להיות מובנית בהעדר סכמה קיימת שנרכשה קודם לכן. הוראה מסורתית מתעלמת מכך לעתים קרובות.*

*...מה שלא יקרה בתוך חדר הכיתה או מחוצה לו, העניין העיקרי צריך להיות הבניית סכמות על ידי התלמידים להבנת המושגים. ההוראה צריכה להיות מוקדשת למטרה של הבאת התלמידים לכך שיעשו את ההבניות שלהם ולסייע להם לאורך התהליך.*

*...הוראה המתוכננת כך שהיא מנסה להוביל את התלמיד לאורך הצעדים הקוגניטיביים של פירוק הקומפוזיציה הגנטית, מפתחת פעילויות ומצבים יצירתיים שיגרמו לתלמידים לעשות את ההפשטות הרפלקטיביות הספציפיות המתבקשות.*

מבנה הספר הוא מודולרי: כלומר כל פרק הוא בבחינת יחידה נפרדת, והפרקים אינם מתבססים זה על זה. המבנה הפנימי משתנה מפרק לפרק בהתאם לתוכנו ולאופיו של כל נושא. פרקים או תת-פרקים מסוימים יכולים לשמש בסיס לקורס מובנה; לפיכך מופיעים בהם דפי עבודה לסטודנטים המלווים בפתרונות, בהסברים ובהערות דידקטיות, וזאת נוסף על דוגמאות בגוף הטקסט. מבנה אקלקטי כזה עשוי להיראות אקראי למדי, אך מטרתו להציג מגוון נושאים

1 מאמרו של דובינסקי הוא דוגמה מצוינת לפיתוח ולשדרוג ידע דידקטי המושתת על אינטגרציה של פרקים רבים במתמטיקה - לוגיקה, פונקציות, אינדוקציה מתמטית - כמו גם על פסיכולוגיה קוגניטיבית וממצאי מחקרים בהוראת המתמטיקה.

מתמטיקה: הוראה בהקשר והוראת ההקשר.

ולהדגים את העושר הגלום בחשיפת הקשרים הקיימים בין נושאים שונים בתוך המתמטיקה ובינה לבין תחומי דעת אחרים.

הידע המתמטי אשר נכלל בפרקים הוא ידע שסטודנטים הלומדים במסגרת הכשרת מורים למתמטיקה אמורים להכיר. בחלק מהפרקים מובאת תמצית של אוסף המושגים הנחוצים לעבודה "על החומר". כל פרק מכיל חומר לימוד עיוני בתחום הידע הנבחר ומגוון תרגילים בנושא. לפעמים התרגילים מופיעים בגוף הטקסט כאיור או כדוגמה לנאמר בו, אבל בדרך כלל הם מאוגדים בדפי עבודה או בדפי תרגילים בהתאם לחלוקה הפנימית של הפרק. לכל דף עבודה מצורף גם דף פתרונות המיועד למרצה. הפתרונות מלווים בהערות והארות שמטרתן להבהיר או להדגיש נקודות מסוימות העוסקות בהיבטים עיוניים או דידקטיים של התרגיל.

כל חלק וכל פרק אפשר ללמד במגוון דרכי הוראה - החל בהוראה פרונטלית וכלה בעריכת ניסויים ולמידה עצמית מודרכת של הסטודנטים. מורי המורים מוזמנים להפעיל שיקול דעת בנושא התאמת פרק או תת-פרק כזה או אחר לדרך למידה-הוראה כלשהי. עם זאת, בחלק מהמקומות יש המלצות מפורשות "להפעיל" סטודנטים כדי שיתנסו בפועל במושגים או בטכניקות מתמטיות מסוימות.

רוב הפרקים נוסו בצורה כזו או אחרת במסגרת הכשרת המורים, כמו גם בהוראה בבתי ספר. כך למשל תתי-הפרקים בפרק "אלגברה ואריתמטיקה" אשר מוקדשים לבעיות מילוליות למיניהן הם חלק מהקורס "אסטרטגיות לפתרון בעיות"; הפרק המוקדש למושגים באופטיקה נלמד בקורס "גאומטריה אנליטית" במסגרת המסלול להכשרת מורים לחטיבת הביניים. פרק זה שימש בסיס ליחידת הוראה שלימד בוגר המסלול בכיתות ט' של חטיבת הביניים במסגרת פרויקט הגמר שלו. קטעים מהפרק "רואים מספר" אשר מוקדשים למספרי פיתגורס הם בסיס לפרק המתאים בקורס "תורת המספרים" שלומדים הסטודנטים במסלול להכשרת מורים לבתי ספר יסודיים.

אשמח ללמוד על אודות כל ניסיון שעשו הקוראים להשתמש בחומר זה בכל מסגרת שהיא ואודה על כל הערה או הארה של עמיתיי למקצוע. את ברכת הדרך

נקבל מספרם הקלאסי של קוראנט ורובינס (Courant & Robbins, 1978), ספר שיצוטט לא אחת בעבודה זו:

*למרבה המזל, מוחות יצירתיים שוכחים אמונות פילוסופיות  
דוגמטיות בכל פעם שהדבקות בהן עלולה לעכב בעד הישג  
קונסטרוקטיבי. הן לגבי מומחים והן לגבי הדיוטות לא  
הפילוסופיה, אלא רק ההתנסות הפעילה במתמטיקה, יכולה  
לענות על השאלה: מהי מתמטיקה?*